Chapitre 12
Probabilités sur un univers dénombrable

Exercice 1 : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé (Ω, P). Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0.$$

Exercice 2 : On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

Exercice 3 : Une feuille de travaux dirigés contient 3 erreurs. Le professeur la relit pour corriger les erreurs. A chaque relecture, chaque erreur à une probabilité 1/4 d'être corrigée. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigées à l'issue de la n-ième relecture.
2. Quelle est la probabilité que toutes les erreurs soient corrigées à l'issue de la n-ième relecture.
3. Combien de relectures faut-il au minimum pour que la probabilité qu'il n'y est plus d'erreur soit d'au moins $0,95$?

Exercice 4 : Deux archers tirent chacun leur tour sur une cible. Le premier qui touche a gagné. Le joueur qui commence à la probabilité $p_1 > 0$ de toucher à chaque tour et le second la probabilité $p_2 > 0$.

1. Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?
2. Montrer qu'il est quasi-certain que le jeu se termine.
3. Pour quelles valeurs de p_1 et p_2 le jeu est-il équitable ?

Exercice 5 : On lance une pièce qui a la probabilité 2/3 de faire pile. Les lancers sont supposés indépendant. On note X le nombre de lancer nécessaire afin d'avoir pour la première fois deux piles consécutifs. On note $p_n = P(X = n)$.

1. Déterminer p_2, p_3 et p_4.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n.$$
3. En déduire une expression explicite de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer le nombre d'essais moyen pour obtenir deux piles consécutifs.

Exercice 6 : Un étudiant rentre d'une soirée. Il dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ clés dont une seule ouvre la porte de son appartement, mais il ne sait plus laquelle.

1. Il essaie les clés les unes après les autres en éliminant les clés qui n'ont pas marché. On note X le nombre d'essai pour trouver la bonne clé.
   (a) Calculer $P(X \geqslant k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
   (b) En déduire la loi de X.
   (c) Combien d'essais lui faut-il en moyenne ?
2. La soirée était bien arrosée. Il ne se souvient pas des clés qu'il a déjà essayé. On note X le nombre d'essai pour trouver la bonne clé.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Combien d'essais lui faut-il en moyenne ?

Exercice 7 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Montrer que $1/X$ admet une espérance, puis calculer là.

Exercice 8 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que $1/(X + 1)$ admet une espérance, puis calculer là.

Exercice 9 : On suppose que tous les couples ont des enfants jusqu'à obtenir un garçon. On souhaite évaluer la proportion de garçons dans une génération de cette population. On note X le nombre d'enfants d'un couple et P la proportion de garçons.

1. Exprimer P en fonction de X.
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer l'espérance de P.

Exercice 10 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{a}{n(n+1)}.$$

1. Déterminer la constante a.
2. La variable aléatoire X admet-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 11 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{a}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. Déterminer la constante a.
2. La variable aléatoire X admet-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 12 : On suppose qu'une colonie d'insectes produit N œufs où N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque $(N = n)$, le nombre X d'œufs qui éclosent suit une loi binomiale de paramètre n et $p \in]0, 1[$. Déterminer la loi de X.

Exercice 13 : Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant « pile » avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois « pile ». Soit X le nombre de « face » obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X admet une espérance, puis calculer là.

Exercice 14 (Loi sans mémoire) **:** Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit une loi sans mémoire, c'est à dire que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$P(X > m) > 0 \quad \text{et} \quad P(X > m + n \mid X > m) = P(X > n).$$

1. Montrer qu'une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ est sans mémoire.
2. Montrer que $P(X > 0) = 1$.
3. Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, on a
$$P(X > m + 1) = P(X > 1)P(X > m).$$
4. En déduire que X suit une loi géométrique.

Exercice 15 : On tire un entier naturel X au hasard, et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X euros de Paul. Si X est pair supérieur ou égal à 2, Paul gagne et reçoit X euros de Pierre. Si $X = 0$ la partie est nulle. On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Paul gagne.

1. Calculer $p + q$ et $p - q$. En déduire p et q.
2. Déterminer l'espérance des gains de chacun.
3. Un joueur est-il avantagé par rapport à l'autre ?